ВІДПОВІДІ

І (дистанційного) етапу Всеукраїнської олімпіади Національного університету харчових технологій з МАТЕМАТИКИ

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки ОДНА – ПРАВИЛЬНА. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Обчислити значення функції $y(x)=\frac{3}{x}$ в точці $x=0,3$.

А) 1; Б) 0,1; В) 10; Г) 0,9.

Відповідь: **В.**

2. Розв'язати рівняння : $x+1=3x-5$.

А) 1,5; Б) –3; В) 3; Г) 1.

Відповідь: **В.**

3. Обчислити без калькулятора $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-3,4$.

А) –7,4; Б) –0,4; В) 3; Г) 0,6.

Відповідь: Г.

Завдання 4–10 повинні містити ПОВНЕ розв'язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв'язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв'язання, і записана правильна відповідь За кожне правильне розв'язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Розв'язати нерівність $5^{3x-1}<125$. У відповіді вказати найбільше ціле x, що задовольняє нерівність.

Розв'язання.

Відомо, якщо $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $a>1$, то $f(x)<g(x)$. Тоді дана нерівність $5^{3x-1}<5^3$ має місце при всіх значеннях x, які задовольняють нерівність

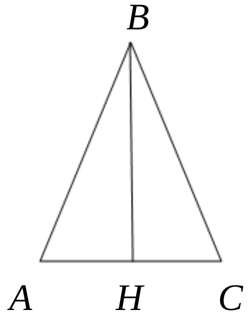
$$3x-1<3 \text{ або } x<\frac{4}{3}.$$

Найбільше ціле значення x, яке задовольняє нерівність $x<\frac{4}{3}$, дорівнює 1.

Відповідь: 1 **.**

5. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см, а бічна сторона дорівнює 13 см.

Розв'язання.



Проведемо висоту BH. Відомо, що в рівнобедренному трикутнику висота, яка проведена до основи, є медіаною. Отже, BH – медіана. Тоді $AH = HC = 12$ см.

Розглянемо прямокутний трикутник ABH. За теоремою Піфагора маємо:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{см}.$$

Оскільки площу трикутника можна знайти за формулою $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot BH}{2}$, то маємо $S_{\Delta ABC} = \dfrac{24 \cdot 5}{2} = 60$ см^2.

Відповідь: 60 см^2.

6. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+3} = x$. У випадку, якщо рівняння має один корінь, то у відповіді вказати цей корінь. Якщо рівняння має декілька коренів, то у відповіді вказати їх суму.

Розв'язання.

Відомо, що рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Запишемо рівносильну систему:

$$\begin{cases} 2x + 3 = x^2; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи, маємо $x^2 - 2x - 3 = 0$. Звідки $x_1 = -1$ та $x_2 = 3$. Тоді

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 3, \end{array} \right. \\ x \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3.$$

Відповідь: **3.**

7. Обчислити значення $x + y$, якщо x і y є розв'язком системи

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ 3x + 2y = -2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Розв'яжемо систему методом додавання. Помножимо обидві частини першого рівняння на 2, одержимо:

$$\begin{cases} 2x-2y=12, \\ 3x+2y=-2. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві та праві частини рівнянь системи, маємо:

$$2x-2y+3x+2y=12-2,\ \ 5x=10,\ \ x=2.$$

Підставимо знайдене значення $x=2$ в перше рівняння вихідної системи, маємо $2-y=6$, $y=-4$. Знайдемо значення $x+y$, де $x=2$, $y=-4$, одержуємо $x+y=-2$.

***Відповідь*:** -2.

8. Спростити тригонометричний вираз $2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha-3$.

Розв'язання.

$$2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha-3=2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)-3=$$

$$=2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha-3=-3.$$

Відповідь: $-3.$

9. Розв'язати рівняння $\log_2(x^2-7x+4)=\log_2(x-3)$. У випадку, якщо рівняння має один корінь, то у відповіді вказати цей корінь. Якщо рівняння має декілька коренів, то у відповіді вказати їх суму.

Розв'язання.

Відомо, що рівняння $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ рівносильне одній з систем:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} x^2-7x+4=x-3, \\ x-3>0. \end{cases}$$

З рівняння $x^2-7x+4=x-3$ маємо $x^2-8x+7=0$. Звідки $x_1=1$ та $x_2=7$. Тоді

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=7, \end{array}\right. \\ x>3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=7.$$

Відповідь: 7

10. Знайти суму найменшого і найбільшого значень функції $y=x^4-2x^2+5$ на відрізку $[0;2]$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $D(y)=R$.

Обчислимо похідну функції: $y'=\left(x^4-2x^2+5\right)'=4x^3-4x$.

Знаходимо критичні точки, для цього прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння $y'(x)=0$. Маємо:

$$4x^3-4x=0, \quad 4x(x^2-1)=0, \quad 4x(x-1)(x+1)=0,$$

звідки $x_1=-1$, $x_2=0$ та $x_3=1$.

Із критичних точок $x_1=-1$, $x_2=0$ та $x_3=1$ відрізку $[0;2]$ належить $x_3=1$, а $x_2=0$ співпадає з кінцем відрізка. Знаходимо значення функції в критичних точках, що належать відрізку, та на кінцях відрізку:

$$y(0)=5, \quad y(1)=4, \quad y(2)=13.$$

Маємо $y_{\min}=y(1)=4, \quad y_{\max}=y(2)=13$.

Сума найменшого і найбільшого значень функції $y=x^4-2x^2+5$ на відрізку $[0;2]$ дорівнює 17.

Відповідь: 17.

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики Ніколаєва О.А.