ВІДПОВІДІ

І (дистанційного) етапу Всеукраїнської олімпіади Національного університету харчових технологій з МАТЕМАТИКИ

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки ОДНА – ПРАВИЛЬНА. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Обчислити : $(0{,}2+0{,}7)^0+1.$

А) –1,9 ; Б) 10 ; В) 2 ; Г) –1,7 .

Відповідь: **В.**

2.Скоротити дріб: $\dfrac{ab+ac}{a}$.

А) $b+c$; Б) $b-c$; В) $b-ac$; Г) $ab-c$.

Відповідь: **А.**

3.Розв'язати рівняння : $10x-5x=5$

А) –3 ; Б) 1 ; В) –1 ; Г) –3 .

Відповідь: Б.

Завдання 4–10 повинні містити ПОВНЕ розв'язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв'язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв'язання, і записана правильна відповідь За кожне правильне розв'язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Розв'язати нерівність $2^{x-1}<2^3$. У відповіді вказати найбільше ціле x, що задовольняє нерівність.

Розв'язання.

Відомо, якщо $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $a>1$, то $f(x)<g(x)$. Тоді дана нерівність $2^{x-1}<2^3$ має місце при всіх значеннях x, які задовольняють нерівність

$$x-1<3 \text{ або } x<4.$$

Найбільше значення x, яке задовольняє нерівність $2^{x-1}<2^3$ дорівнює 3.

Відповідь: **3.**

5. Площа трапеції дорівнює 50 см^2, а її висота дорівнює 5 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них у 4 рази менша за другу.

Розв'язання.

Нехай менша основа трапеції дорівнює x, тоді більша основа дорівнює $4x$. Оскільки площу трапеції можна знайти за формулою $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, то маємо рівняння $50=\frac{x+4x}{2}\cdot 5$, звідки $25x=100$, $x=4$. Отже, менша основа трапеції дорівнює 4, а більша основа дорівнює 16.

Відповідь: **4;16.**

6. Розв'язати рівняння $3(x-4)+\log_{12}(x-2)=\log_{12}(x-2)+3$.

Розв'язання.

Відомо, що областю визначення функції $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ є множина $(0;+\infty)$, тому дане рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases}3(x-4)=3,\\ x-2>0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=5,\\ x>2.\end{cases}$$

Звідки маємо $x=5$.

Відповідь: **5.**

7. Підприємство придбало 9 приладів першого та другого типів. Один прилад першого типу коштує 2000 грн., другого – 3000 грн. За всю покупку заплатили 22000 грн. Скільки купили приладів першого типу?

Розв'язання.

Позначимо кількість приладів першого типу через x, тоді кількість приладів другого типу дорівнює $(9-x)$. Підприємство сплатило за всі прилади $2000x+3000(9-x)$ грн., що за умови складає 22000 грн. Отже, маємо рівняння:

$$2000x+3000(9-x)=22000,\quad \big|:1000$$
$$2x+3(9-x)=22,$$
$$2x+27-3x=22,$$
$$x=5.$$

Отже, підприємство придбало 5 приладів першого типу.

Відповідь: **5.**

8. Знайти локальний максимум функції $y=2-3x^2-2x^3$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $D(y)=R$.

Обчислимо похідну функції: $y'=\left(2-3x^2-2x^3\right)'=-6x-6x^2$.

Знаходимо критичні точки, для цього прирівнюємо похідну до нуля і заходимо корені рівняння $y'(x)=0$. Маємо рівняння:

$$-6x-6x^2=0, \quad \Rightarrow \quad -6x(1+x)=0, \text{ звідси } x_1=0,\ x_2=-1.$$

Критичні точки розбивають числову вісь на три інтервали $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ та $(0;+\infty)$. Визначаємо знак похідної на інтервалах. При $x\in(-\infty;-1)$ та при $x\in(0;+\infty)$ маємо, що $f'(x)<0$, та $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)$. При переході через точку $x=0$ зліва направо похідна змінює знак з + на –, отже точка $x=0$ є точкою локального максимуму та $y_{\max}=y(0)=2$.

Відповідь: **2.**

9. Спростити вираз $\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)}$.

Розв'язання.

Скористаємося формулою $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. Маємо

$$\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=$$

$$=2\cdot\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}=2.$$

Відповідь: **2.**

10. Знайти суму найменшого та найбільшого цілих значень x, які задовольняють нерівність $\dfrac{x}{6-\sqrt{x}}>3$.

Розв'язання.

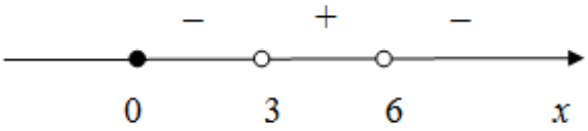
Зробимо заміну $t=\sqrt{x},\ t\ge 0$. Тоді нерівність запишеться у вигляді $\dfrac{t^2}{6-t}>3$. Перетворимо нерівність:

$$\frac{t^2}{6-t}-3>0, \qquad \frac{t^2-3(6-t)}{6-t}>0, \qquad \frac{t^2+3t-18}{6-t}>0.$$

Розкладемо чисельник на множники, маємо

$$\frac{(t-3)(t+6)}{6-t}>0.$$

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів. Область визначення функції $f(t)=\dfrac{(t-3)(t+6)}{6-t}$ це множина $[0;6)\cup(6;+\infty)$. Нуль функції дорівнює 3 (нуль функції, який дорівнює -6 не розглядаємо, оскільки $t\ge 0$). Маємо такі проміжки знакосталості: $[0;3)$, $(3;6)$та $(6;+\infty)$. Визначаємо знак функції на цих проміжках.



Отже, нерівність $\frac{(t-3)(t+6)}{6-t} > 0$ виконується при $t \in (3;6)$, тобто $3 < t < 6$, тоді $3 < \sqrt{x} < 6$, $9 < x < 36$. Найменше та найбільше цілі значення x, які задовольняють нерівність, дорівнюють відповідно 10 та 35, їх сума дорівнює 45.

Відповідь: **45.**

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики Ніколаєва О.А.