ВІДПОВІДІ

Інтелектуальних змагань
Національного університету харчових технологій
з МАТЕМАТИКИ

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки ОДНА – ПРАВИЛЬНА. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Обчислити значення функції $f(x)=\sqrt{-2x+14}$ в точці $x=5$.

А) 4; Б) 1; В) 8; Г) 2.

Відповідь: **Г.**

2. Обчислити $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-2\cdot(4-7)^{0}$.

А) –12; Б) –4; В) 14; Г) 6.

Відповідь: **В.**

3. Знайти периметр квадрата, якщо його площа дорівнює 49 кв.од.

А) 49; Б) 14; В) 21; Г) 28.

.

Відповідь: Г.

Завдання 4–10 повинні містити ПОВНЕ розв'язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв'язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв'язання, і записана правильна відповідь За кожне правильне розв'язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Розв'язати рівняння $(x+4)^2=x^2+4$.

Розв'язання.

За формулою $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ маємо:

$$x^2+8x+16=x^2+4;$$
$$8x=-12;$$
$$x=-1,5.$$

Відповідь: $-1,5$ **.**

5. Розв’язати нерівність $2^{4x+3} \ge 4^{7x+8}$. У відповіді вказати найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівність.

Розв’язання.

Оскільки $4 = 2^2$, то дана нерівність може бути переписана у вигляді

$$2^{4x+3} \ge 2^{2(7x+8)}$$

Відомо, якщо $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a > 1$, то $f(x) \ge g(x)$. Тоді дана нерівність $2^{4x+3} \ge 2^{14x+16}$ має місце при всіх значеннях x, які задовольняють нерівність

$$4x + 3 \ge 14x + 16,$$

$$-10x \ge 13,$$

$$x \le -\frac{13}{10}, \quad \text{або} \quad x \le -1{,}3.$$

Найбільше ціле значення x, яке задовольняє нерівність $x \le -1{,}3$ дорівнює -2.

Відповідь: -2.

6. Обчислити значення $x \cdot y$, якщо x і y є розв’язкам системи

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 3, \\ x + 2y = -15. \end{cases}$$

Розв’язання.

Піднесемо обидві частини першого рівняння до квадрату, маємо систему:

$$\begin{cases} x - y = 9, \\ x + 2y = -15. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему методом підстановки.

$$\begin{cases} x = 9 + y, \\ 9 + y + 2y = -15. \end{cases}$$

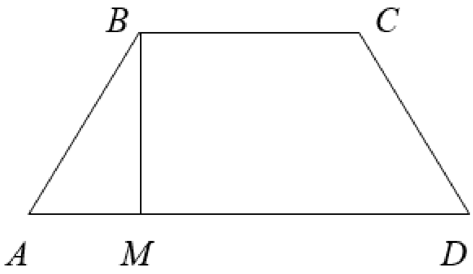
З другого рівняння знаходимо y: $3y = -24$, $y = -8$.

Підставимо знайдене значення $y = -8$ в перше рівняння, маємо $x = 1$. Знайдемо значення $x \cdot y$, де $x = 1$, $y = -8$, одержуємо $x \cdot y = -8$.

***Відповідь*:** -8.

7. Основи трапеції дорівнюють 8 см та 14 см. Один з гострих кутів трапеції дорівнює 30°, а бічна сторона, прилегла до цього кута, дорівнює 6 см. Знайдіть площу трапеції.

Розв'язання.



Маємо трапецію $ABCD$, $\angle BAD = 30°$, $BC = 8$ см, $AD = 14$ см, $AB = 6$ см. Проведемо висоту BM, розглянемо ΔABM, $\angle BMA = 90°$, $BM = 3$ см, як катет, що лежить напроти кута 30°.

Площу трапеції можна знайти за формулою

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BM,$$

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{8+14}{2} \cdot 3 = 33 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 33 см^2.

8. Обчислити $3 + 4\log_4 32 + 8\log_{16} 2 - 10^{\lg 3}$.

Розв'язання.

Відомо, що $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$ та $a^{\log_a b} = b$, тоді

$$3 + 4\log_4 32 + 8\log_{16} 2 - 10^{\lg 3} = 3 + 4\log_{2^2} 32 + 8\log_{2^4} 2 - 3 =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\log_2 32 + 8 \cdot \frac{1}{4}\log_2 2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12.$$

Відповідь: 12.

9. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на відрізку $[-2;1]$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $D(y) = R$.

Обчислимо похідну функції: $y' = \left(x^4 - 8x^2 + 3\right)' = 4x^3 - 16x$.

Знаходимо критичні точки, для цього прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння $y'(x) = 0$. Маємо:

$$4x^3 - 16x = 0, \quad 4x(x^2 - 4) = 0,$$

звідки $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

Критична точка $x_1 = 0$ належить відрізку $[-2;1]$. Знаходимо значення функції в критичній точці, що належать відрізку, та на кінцях відрізку:

$$y(0) = 3, \quad y(1) = -4, \quad y(-2) = -13.$$

Маємо $y_{\min} = y(-2) = -13, \quad y_{\max} = y(0) = 3.$

Відповідь: $\min\limits_{x\in[-2;1]} y = -13, \quad \max\limits_{x\in[-2;1]} y = 3.$

10. Знайти суму найменшого та найбільшого цілих значень x, які задовольняють нерівність $\dfrac{x}{2-\sqrt{x}} > 1$.

Розв'язання.

Область визначення даної нерівності $x \geq 0, \quad x \neq 4$. Зробимо заміну $t = \sqrt{x}, \ t \geq 0$. Тоді маємо нерівність $\dfrac{t^2}{2-t} - 1 > 0$, звідки $\dfrac{t^2+t-2}{2-t} > 0$, $\dfrac{(t-1)(t+2)}{2-t} > 0$. Тут ми розклали квадратний тричлен на множники за формулою $ax^2+bx+c = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де $x_1, \ x_2$ - корені квадратного тричлена.

З урахуванням умови $t \geq 0$, маємо нерівність $\dfrac{t-1}{2-t} > 0$, яка евівалента сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t-1>0, \\ 2-t>0, \end{cases} \\ \begin{cases} t-1<0, \\ 2-t<0, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 1 < t < 2.$$

Повернемося до початкової змінної: $1 < x < 4$. Найбільше ціле значення x, яке задовольняє нерівність $1 < x < 4$ дорівнює 3, а найменше 2, сума найменшого та найбільшого цілих значень x дорівнює 5.

Відповідь: 5.

Голова предметно-методичної комісії
Інтелектуальних змагань НУХТ з математики Ніколаєва О.А.