

ВІДПОВІДІ

Всеукраїнської олімпіади Національного університету харчових технологій з МАТЕМАТИКИ

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки **ОДНА – ПРАВИЛЬНА**. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Обчислити значення функції $y(x) = \frac{36}{x^2}$ в точці $x = 3$.

А) 6 ; Б) 12 ; В) 4 ; Г) 9 .

Відповідь: В.

2. Обчислити без калькулятора $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 2 \cdot (3-5)^0$.

А) -12; Б) -4; В) 14; Г) -7.

Відповідь: В.

3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 10 і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

А) 22 ; Б) 120; В) 60 ; Г) 44 .

Відповідь: В.

Завдання 4–10 повинні містити **ПОВНЕ** розв’язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв’язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв’язання, і записана правильна відповідь. За кожне правильне розв’язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Спростити вираз $\frac{a^2 + 8a + 16}{a + 4} - a + 2$.

Розв’язання.

Скористаємося формулою скороченого множення: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$\frac{a^2 + 8a + 16}{a + 4} - a + 2 = \frac{(a + 4)^2}{a + 4} - a + 2 = a + 4 - a + 2 = 6.$$

Відповідь: 6 .

5. Розв'язати нерівність $7^{4x+3} \geq 7^{7x+8}$. У відповіді вказати найбільше ціле значення x , що задовольняє нерівність.

Розв'язання.

Відомо, якщо $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a > 1$, то $f(x) \geq g(x)$. Тоді дана нерівність $7^{4x+3} \geq 7^{7x+8}$ має місце при всіх значеннях x , які задовольняють нерівність

$$\begin{aligned} 4x + 3 &\geq 7x + 8, \\ -3x &\geq 5, \\ x &\leq -\frac{5}{3} \quad \text{або} \quad x \leq -1\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Найбільше ціле значення x , яке задовольняє нерівність $x \leq -1\frac{2}{3}$, дорівнює -2 .

Відповідь: -2 .

6. Обчислити значення $x \cdot y$, якщо x і y є розв'язками системи

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 2, \\ 2x + 3y = -7. \end{cases}$$

Розв'язання.

Піднесемо обидві частини першого рівняння до квадрату:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-y} &= 2, \\ x-y &= 4. \end{aligned}$$

Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y = 4, \\ 2x+3y = -7. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння системи на 3, отримаємо:

$$\begin{cases} 3x-3y = 12, \\ 2x+3y = -7. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві та праві частини рівнянь системи, маємо:

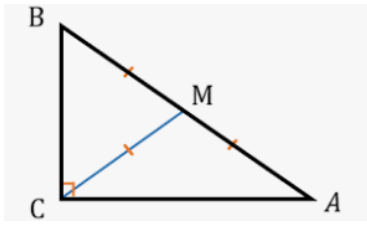
$$3x - 3y + 2x + 3y = 12 - 7, \quad 5x = 5, \quad x = 1.$$

Підставимо знайдене значення $x=1$ в перше рівняння вихідної системи, маємо $1-y=4$, звідки $y=-3$. Знайдемо значення $x \cdot y$, де $x=1$, $y=-3$, одержуємо $x \cdot y = -3$.

Відповідь: -3 .

7. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 5 см. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання.



Маємо прямокутний трикутник ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, в якому катет $BC = 6$ см.

Проведемо медіану CM . Відомо, що в прямокутному трикутнику медіана, яка проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $CM = BM = AM = 5$ см.

Тоді $AB = 2CM = 2 \cdot 5 = 10$ см. За теоремою Піфагора маємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Тоді

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ см.}$$

Оскільки площу прямокутного трикутника можна знайти за формулою

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}, \text{ то маємо } S_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 24 см^2 .

8. Обчислити

$$1 + 2\log_4 32 + 6\log_{27} 3 + 10^{\lg 5}.$$

Розв'язання.

Відомо, що $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$, $a^{\log_a b} = b$, тоді

$$\begin{aligned} 1 + 2\log_4 32 + 6\log_{27} 3 + 10^{\lg 5} &= 1 + 2\log_{2^2} 32 + 6\log_{3^3} 3 + 5 = \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 32 + 6 \cdot \frac{1}{3} \log_3 3 + 5 = 1 + 5 + 2 + 5 = 13. \end{aligned}$$

Відповідь: 13.

9. Спростити вираз $\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ та знайти його значення при $\alpha = \frac{\pi}{16}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 2\alpha + (1 - \sin^2 2\alpha)}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \\ &= \frac{2 \cos^2 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \cos 2\alpha \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{При } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ маємо } \frac{1}{2} \sin \left(4 \cdot \frac{\pi}{16} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. Знайти локальний максимум функції $y = 1 - x^3 + 3x^2$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $D(y) = R$.

Обчислимо похідну функції: $y' = (1 - x^3 + 3x^2)' = -3x^2 + 6x$.

Знаходимо критичні точки, для цього прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння $y'(x) = 0$. Маємо:

$$-3x^2 + 6x = 0, \quad -3x(x - 2) = 0,$$

звідки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$.

Критичні точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$ розбивають числову вісь на три інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ та $(2; +\infty)$, причому на інтервалах $(-\infty; 0)$ та $(2; +\infty)$ $y'(x) < 0$, а на інтервалі $(0; 2)$ $y'(x) > 0$. Оскільки в точці $x_2 = 2$ похідна змінює знак з "+" на "-", то $x_2 = 2$ – точка локального максимуму і $y_{\max} = y(2) = 5$.

Відповідь: 5.

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики

Ніколаєва О.А.