

ВІДПОВІДІ

першого туру Всеукраїнської олімпіади Національного університету харчових технологій з МАТЕМАТИКИ 2024

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки **ОДНА – ПРАВИЛЬНА**. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Розв'язати рівняння $x^2 + 2 = 18$.

А) $\{-4; 4\}$; Б) $\{-2; 2\}$; В) -4 ; Г) 16 .

Відповідь: А.

2. Сторони прямокутника дорівнюють 5 та 6 см. Знайдіть периметр прямокутника.

А) 11; Б) 30; В) 22; Г) 24.

Відповідь: В.

3. Обчислити значення функції $f(x) = x - \sqrt[4]{x}$ в точці $x = 16$.

А) 12; Б) 0; В) 12; Г) 14.

Відповідь: Г.

Завдання 4–10 повинні містити **ПОВНЕ** розв'язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв'язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв'язання, і записана правильна відповідь. За кожне правильне розв'язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Спростити вираз $(8x + 3) - 8(x + 6)$.

Розв'язання.

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$(8x + 3) - 8(x + 6) = 8x + 3 - 8x - 48 = -45.$$

Відповідь: -45 .

5. Розв'язати нерівність $2^{3x-8} < 32$. У відповіді вказати найбільше ціле x , що задовольняє нерівність.

Розв'язання.

Відомо, якщо $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a > 1$, то $f(x) < g(x)$. Тоді дана нерівність $2^{3x-8} < 2^5$ має місце при всіх значеннях x , які задовольняють нерівність

$$3x - 8 < 5,$$

$$3x < 13,$$

$$x < \frac{13}{3} \quad \text{або} \quad x < 4\frac{1}{3}.$$

Найбільше ціле значення x , яке задовольняє нерівність $x < 4\frac{1}{3}$ дорівнює 4.

Відповідь: 4 .

6. Обчислити значення $x \cdot y$, якщо x і y є розв'язком системи

$$\begin{cases} 2x - 3y = -8, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Розв'яжемо систему методом додавання. Додамо почленно ліві та праві частини рівнянь системи, маємо:

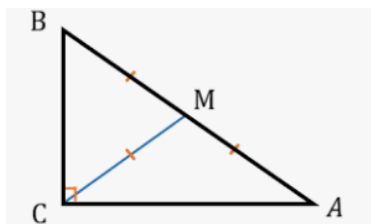
$$2x - 3y + x + 3y = -8 + 5, \quad 3x = -3, \quad x = -1.$$

Підставимо знайдене значення $x = -1$ в друге рівняння вихідної системи, маємо $-1 + 3y = 5$, $3y = 6$, $y = 2$. Знайдемо значення $x \cdot y$, де $x = -1$, $y = 2$, одержуємо $x \cdot y = -2$.

Відповідь: -2.

7. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, - 8,5 см. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання.



Маємо прямокутний трикутник ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, в якому катет $AC = 15$ см.

Проведемо медіану CM . Відомо, що в прямокутному трикутнику медіана, яка проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $CM = BM = AM = 8,5$ см.

Тоді $AB = 2CM = 2 \cdot 8,5 = 17$ см. За теоремою Піфагора маємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Тоді

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = 8 \text{ см.}$$

Оскільки площу прямокутного трикутника можна знайти за формулою

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}, \text{ то маємо } S_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 60 см^2 .

8. Обчислити

$$2 + \log_7 42 + \log_{1/7} 6.$$

Розв'язання.

Відомо, що $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ та $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, тоді

$$\begin{aligned} 2 + \log_7 42 + \log_{1/7} 6 &= 2 + \log_7 42 + \log_{7^{-1}} 6 = 2 + \log_7 42 - \log_7 6 = 2 + \log_7 \frac{42}{6} = \\ &= 2 + \log_7 7 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Відповідь: 3.

9. Спростити вираз $\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ та знайти його значення при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot (1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{При } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ маємо } \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Відповідь: 2

10 Знайти суму найменшого і найбільшого значень функції $y = 2x^4 - 8x$ на відрізку $[0; 2]$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $D(y) = \mathbb{R}$.

Обчислимо похідну функції: $y' = (2x^4 - 8x)' = 8x^3 - 8$.

Знаходимо критичні точки, для цього прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо рівняння $y'(x) = 0$. Маємо:

$$8x^3 - 8 = 0, \quad 8(x^3 - 1) = 0,$$

звідки $x = 1$.

Критична точка $x = 1$ належить відрізку $[0; 2]$. Знаходимо значення функції в критичній точці та на кінцях відрізку:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = -6, \quad y(2) = 16.$$

Маємо $y_{\min} = y(1) = -6$, $y_{\max} = y(2) = 16$.

Сума найменшого і найбільшого значень функції $y = 2x^4 - 8x$ на відрізку $[0;2]$ дорівнює 10.

Відповідь: 10.

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики

Ніколаєва О.А.