ВІДПОВІДІ

І (дистанційного) етапу Всеукраїнської олімпіади Національного університету харчових технологій з МАТЕМАТИКИ

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки ОДНА – ПРАВИЛЬНА. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Розв'язати рівняння $\frac{5}{x} = 4.$

А) x = 2 ; Б) x = 1,25 ; В) x = 0,8 ; Г) x = 0,4.

Відповідь: **Б.**

2. Обчислити без калькулятора $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (1-3).$

А) 1,2 ; Б) 1,5; В) –8 ; Г) 1.

Відповідь: **В.**

3. Катети трикутника дорівнюють 5 і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

А) 5; Б) 12; В) 100; Г) 30 .

Відповідь: Г.

Завдання 4–10 повинні містити ПОВНЕ розв'язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв'язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв'язання, і записана правильна відповідь За кожне правильне розв'язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Спростити вираз $\frac{a^2-16}{a+4} - a + 2.$

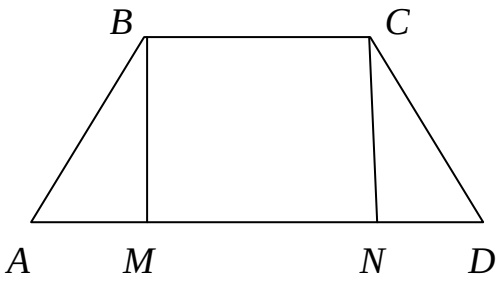
Розв'язання.

$$\frac{a^2-16}{a+4} - a + 2 = \frac{(a-4)(a+4)}{a+4} - a + 2 = a - 4 - a + 2 = -2.$$

Відповідь: -2 **.**

5. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 20 см, а бічна сторона дорівнює 10 см.

Розв'язання.



Проведемо висоти BM і CN, звідки маємо $BCNM$ – прямокутник. Тоді $BC = MN = 8$ см. Оскільки трапеция рівнобічна, то $AM = ND = \frac{20-8}{2} = 6$ см.

Розглянемо прямокутний трикутник ABM. За теоремою Піфагора $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{100-36} = 8$ см.

Знайдемо площу трапеції за формулою $S = \frac{AD+BC}{2} \cdot BM$, маємо

$$S = \frac{20+8}{2} \cdot 8 = 112 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 112 см^2.

6. Розв'язати нерівність $2^{4x-5} \geq 2^{3x+6}$. У відповіді вказати найменше значення x, яке задовольняє нерівність.

Розв'язання.

Відомо, якщо $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a > 1$, то $f(x) \geq g(x)$. Тоді дана нерівність $2^{4x-5} \geq 2^{3x+6}$ має місце при всіх значеннях x, які задовольняють нерівність

$$4x - 5 \geq 3x + 6,$$

$$x \geq 11.$$

Найменше значення x, яке задовольняє нерівність $x \geq 11$ дорівнює 11.

Відповідь: 11**.**

7. Обчислити значення $x + y$, якщо x і y є розв'язком системи

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + 3y = -7. \end{cases}$$

Розв'язання.

Розв'яжемо систему методом додавання. Помножимо обидві частини першого рівняння на 3, одержимо:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 12, \\ 2x + 3y = -7. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві та праві частини рівнянь системи, маємо

$$3x - 3y + 2x + 3y = 12 - 7, \;\; 5x = 5, \;\; x = 1.$$

Підставимо знайдене значення $x=1$ в перше рівняння вихідної системи, маємо $1-y=4$, $y=-3$. Знайдемо значення $x+y$, де $x=1$, $y=-3$, одержуємо $x+y=-2$.

***Відповідь*:** -2.

8. Спростити вираз $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ та знайти його значення при $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання.

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\cdot(1-\sin\alpha)+\cos\alpha\cdot(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}.$$

При $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ маємо $\dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

Відповідь: $2\sqrt{2}.$

9. Розв'язати рівняння $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$. У випадку, якщо рівняння має один корінь, то у відповіді вказати цей корінь. Якщо рівняння має декілька коренів, то у відповіді вказати їх суму.

Розв'язання.

Маємо ірраціональне рівняння, область визначення якого визначається з системи:

$$\begin{cases}22-x\ge 0,\\ 10-x\ge 0.\end{cases}$$

Отже, область визначення рівняння $M=(-\infty;10]$.

З рівняння $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$ маємо $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$. На області визначення обидві частини данного рівняння набувають невід'ємних значень, тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню

$$\left(\sqrt{22-x}\right)^2=\left(2+\sqrt{10-x}\right)^2.\ \text{Звідки}$$

$$22-x=4+4\sqrt{10-x}+10-x,\qquad \sqrt{10-x}=2,$$

$$10-x=4,\qquad x=6.$$

Відповідь: 6.

10. Знайти суму найменшого і найбільшого значень функції $y=2x^4-8x$ на відрізку $[-1;2]$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $D(y)=R$.

Обчислимо похідну функції: $y'=\left(2x^4-8x\right)'=8x^3-8$.

Знаходимо критичні точки, для цього прирівнюємо похідну до нуля і заходимо корені рівняння $y'(x)=0$. Маємо рівняння:

$$8x^3-8=0, \quad \Rightarrow \quad x^3-1=0, \text{ звідки } x=1.$$

Критична точка $x=1$ належить відрізку $[-1;2]$. Знаходимо значення функції в критичній точці та на кінцях відрізку:

$$y(-1)=10;\ y(1)=-6;\ y(2)=16.$$

Маємо найменше значення функції на відрізку $[-1;2]$ дорівнює -6, найбільше 16. Сума найменшого і найбільшого значень функції $y=2x^4-8x$ на відрізку $[-1;2]$ дорівнює 10.

Відповідь: 10.

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики Ніколаєва О.А.